第 45 卷　第 2 期　湖州师范学院学报　Vol. 45　No. 2
2023 年 2 月　Journal of Huzhou University　Feb. 2023

耦合 Choquard 方程组正规化解的存在性

李佳默[1]，沈自飞[2]
（浙江师范大学 数学与计算机科学学院，浙江 金华 321004）

摘　要：考虑一类耦合非线性 Choquard 方程组正规化解的存在性. 在 p 取不同范围下，利用变分法，通过对能量泛函极小问题的讨论，得到方程组次临界、临界和超临界正规化解的存在性. 该结果发展和推广了相关文献的结果.

关键词：耦合 Choquard 方程组；变分法；正规化解

中图分类号：O176.3　**文献标志码**：A　**文章编号**：1009－1734(2023)02－0015－08

0　引言

本文考虑以下耦合非线性 Choquard 方程组：

$$\begin{cases} -\Delta u_1-\mu_1 u_1=\lambda_1(I_\alpha\mid u_1\mid^p)\mid u_1\mid^{p-2}u_1+\beta(I_\alpha\mid u_2\mid^p)\mid u_1\mid^{p-2}u_1, & x\in\mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2-\mu_2 u_2=\lambda_2(I_\alpha\mid u_2\mid^p)\mid u_2\mid^{p-2}u_2+\beta(I_\alpha\mid u_1\mid^p)\mid u_2\mid^{p-2}u_2, & x\in\mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

其中，$N\geqslant 3, \lambda_1, \lambda_2, \beta>0, \alpha\in(0,N), \dfrac{N+\alpha}{N}\leqslant p<\dfrac{N+\alpha}{N-2}, (u_1,u_2)\in\mathscr{H}:=H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$，$\mu_1,\mu_2\in\mathbb{R}$ 是拉格朗日乘子，$I_\alpha:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ 是 Riesz 位势，被定义为：

$$I_\alpha(x)=\frac{\Gamma\left(\dfrac{N-\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\pi^{\frac{N}{2}}2^\alpha\mid x\mid^{N-\alpha}},\quad x\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}.$$

对于方程组(1)，Wang 和 Shi 证明了当 $N=3, \alpha=2, p=2$ 时，耦合 Hartree方程组基态解的存在性[1]. 随后，Wang 和 Yang 又证明了当 $N-\alpha=2, p=2$ 时，耦合 Hartree 方程组正规化解的存在性[2].

本文研究当 p 取不同范围时，方程组(1) 正规化解的存在性. 此问题可转化为能量泛函的极小化问题：

$$I_p(c^2)=\inf\nolimits_{(u_1,u_2)\in\mathscr{N}}I_p(u_1,u_2), \tag{2}$$

其中，

$$\mathscr{N}(c)=\{(u_1,u_2)\in\mathscr{H}:\mid u_1\mid_2=\mid u_2\mid_2=c, c>0\}, \mid\cdot\mid_p=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\cdot^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.$$

而

$$\begin{aligned} I_p(u_1,u_2)=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(\mid\nabla u_1\mid^2+\mid\nabla u_2\mid^2)\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\beta(I_\alpha\mid u_2\mid^p)\mid u_1\mid^p\mathrm{d}x- \\ &\frac{1}{2p}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\lambda_1(I_\alpha\mid u_1\mid^p)\mid u_1\mid^p+\lambda_2(I_\alpha\mid u_2\mid^p)\mid u_2\mid^p\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3}$$

是方程组(1) 对应的能量泛函.

由变分法知，$I_p(c^2)$ 的极小元是 $I_p(u_1,u_2)$ 在 $\mathscr{N}(c)$ 上的临界点. 为了对能量泛函进行估计，需要以下插值不等式[3]：

收稿日期：2022－12－08
基金项目：国家自然科学基金项目(12071438).
通信作者：沈自飞，博士，教授，研究方向：非线性泛函分析及其应用. E－mail：szf@zjnu.edu.cn

$$\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha|u|^p)|u|^p\mathrm{d}x\leqslant\frac{p}{|Q_p|_2^{2p-2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{Np-(N+\alpha)}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N+\alpha-(N-2)p}{2}},\quad x\in\mathbb{R}^N,\tag{4}$$

其中，$\frac{N+\alpha}{N}\leqslant p<\frac{N+\alpha}{N-2}$.

当 $u=Q_p$ 时，式(4) 取等号. 这里 Q_p 是方程

$$-\frac{Np-(N+\alpha)}{2}\Delta Q_p+\frac{N+\alpha-(N-2)p}{2}Q_p=(I_\alpha|Q_p|^p)|Q_p|^{p-2}Q_p\tag{5}$$

的非平凡解. 而 $Q_{(N+\alpha+2)/N}$ 是方程(5) 非平凡解中能量最小的解，被称为方程(5) 的基态解. 特别地，当 $p=\frac{N+\alpha}{N}$ 时，存在具有最佳常数的 Hardy - Littlewood - Sobolev 不等式[4]：

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left(I_\alpha|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}\right)|u|^{\frac{N+\alpha}{N}}\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{|Q_{(N+\alpha)/N}|^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{N+\alpha}{N}}.\tag{6}$$

当且仅当 $u=Q_{(N+\alpha)/N}=C\left(\frac{\eta}{\eta^2+|x-a|^2}\right)^{\frac{N}{2}}$ 时，式(6) 取等号，其中 C 是一个既定的常数，$a\in\mathbb{R}^N$，$\eta\in(0,+\infty)$.

本文主要研究式(2) 极小元的存在性与 p 之间的关系. 其结果如下：

定理 设 $N\geqslant 3$，$\alpha\in(0,N)$，$c^*=2^{\frac{-N}{2(2+\alpha)}}|Q_{(N+\alpha+2)/N}|_2$，则

(Ⅰ) 若 $p=\frac{N+\alpha}{N}$，则对任意 $c>0$，

$$I_{(N+\alpha)/N}(c^2)=-\frac{N(\lambda_1+\lambda_2+2\beta)}{2(N+\alpha)}\left(\frac{c}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2}\right)^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}$$

不存在极小元；

(Ⅱ) 若 $\frac{N+\alpha}{N}<p<\frac{N+\alpha+2}{N}$，则对任意 $c>0$，$I_p(c^2)<0$，且至少存在一个径向极小元；

(Ⅲ) 若 $p=\frac{N+\alpha+2}{N}$，$0<\lambda_1,\lambda_2<1$ 且 $\beta\leqslant\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，则对任意 $0<c\leqslant c^*$，有：

(ⅰ) $I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)=0$；

(ⅱ) $I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)$ 不存在极小元；

(ⅲ) $I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)$ 在 $N(c)$ 上不存在临界点.

(Ⅳ) 若 $p=\frac{N+\alpha+2}{N}$，$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 1$，且 $\beta\geqslant\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，则对任意 $c>c^*$，$I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)$ 不存在极小元；

(Ⅴ) 若 $\frac{N+\alpha+2}{N}<p<\frac{N+\alpha}{N-2}$，则对任意 $c>0$，$I_p(c^2)=-\infty$.

1 相关引理

为证明上述定理，下面介绍一些重要引理.

引理 1[5] 设 $1<p,q<+\infty$，$0<\lambda<N$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{N}=2$，则对任意 $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$，$g\in L^q(\mathbb{R}^N)$，有：

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(x)g(x)}{|x-y|^\lambda}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\leqslant C(p,q,\lambda)|f|_p|g|_q.$$

为简化计算，令

$$A(u_i)=\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_i|^2\mathrm{d}x,$$

$$B(u_i)=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha\,|u_i|^p)\,|u_i|^p\,\mathrm{d}x,$$

$$D(u_1{}^p,u_2{}^p)=\int_{\mathbb{R}^N}(I_\alpha\,|u_1|^p)\,|u_2|^p\,\mathrm{d}x,$$

则式(4) 可转化为：

$$B(u_i)\leqslant\frac{p}{|Q_p|_2^{2p-2}}\Big(A(u_i)\Big)^{\frac{Np-(N+\alpha)}{2}}\Big(\int_{\mathbb{R}^N}|u_i|^2\mathrm{d}x\Big)^{\frac{N+\alpha-(N-2)p}{2}}.\tag{7}$$

当 $u_i=Q_p$ 时，式(7) 取等号，其中 $i=1,2$，$(u_1,u_2)\in\mathcal{H}$，Q_p 是式(5) 的非平凡解，且

$$A(Q_p)=\frac{1}{p}B(Q_p)=|Q_p|_2^2.\tag{8}$$

引理 2[2]　若 $(u_1,u_2)\in\mathcal{H}$，$\dfrac{N+\alpha}{N}\leqslant p<\dfrac{N+\alpha}{N-2}$，则

$$D(u_1^p,u_2^p)\leqslant(D(u_1^p,u_1^p)D(u_2^p,u_2^p))^{\frac{1}{2}}.$$

引理 3[6]　设 $\boldsymbol{\Omega}$ 是 $\mathbb{R}^N$ 的开子集，且序列 $\{u_n\}\subset L^p(\boldsymbol{\Omega})(1\leqslant p<\infty)$. 若序列 $\{u_n\}$ 在 $L^p(\boldsymbol{\Omega})$ 中有界，则

$$\lim_{n\to+\infty}(|u_n|_p^p-|u_n-u|_p^p)=|u|_p^p.$$

引理 4[6]　设 $r>0$，$2\leqslant q<\dfrac{2N}{N-2}=2^*$. 若序列 $\{u_n\}$ 在 $H^1(\mathbb{R}^N)$ 中有界，且满足

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^N}\int_{B_r(y)}|u_n|^q\mathrm{d}x\to 0\ (n\to\infty),$$

则在 $L^s(\mathbb{R}^N)$ 中 $u_n\to 0\ (n\to\infty)$，其中 $2<s<2^*$.

引理 5　设 $N\geqslant 3$，$\alpha\in(0,N)$，$p\in\left[\dfrac{N+\alpha}{N},\dfrac{N+\alpha}{N-2}\right]$. 若 $\{(u_{1n},u_{2n})\}$ 在 $L^{2Np/(N+\alpha)}(\mathbb{R}^N)\times L^{2Np/(N+\alpha)}(\mathbb{R}^N)$ 中有界，在 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 中 $(u_{1n},u_{2n})\xrightarrow{\text{a. e.}}(u_1,u_2)\ (n\to\infty)$，且在 $\mathcal{H}$ 中有 $(u_{1n},u_{2n})\rightharpoonup(u_1,u_2)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\Big(D(u_{1n}^p,u_{2n}^p)-D((u_{1n}-u_1)^p,(u_{2n}-u_2)^p)\Big)=D(u_1^p,u_2^p).$$

证明　通过计算可得：

$$\begin{aligned}&D(u_{1n}^p,u_{2n}^p)-D\Big((u_{1n}-u_1)p,(u_{2n}-u_2)p\Big)=\\&D(|u_{1n}|^p-|u_{1n}-u_1|^p,\ |u_{2n}|^p-|u_{2n}-u_2|^p)+\\&\int_{\mathbb{R}^N}\Big(I_\alpha(|u_{1n}|^p-|u_{1n}-u_1|^p)\Big)|u_{2n}-u_2|^p\mathrm{d}x+\\&\int_{\mathbb{R}^N}\Big(I_\alpha(|u_{2n}|^p-|u_{2n}-u_2|^p)\Big)|u_{1n}-u_1|^p\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{9}$$

由引理 3 可知，当 $n\to\infty$ 时，在 $L^{2N/(N+\alpha)}(\mathbb{R}^N)$ 中 $|u_{in}|^p-|u_{in}-u_i|^p\to|u_i|^p(i=1,2)$. 因为在 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 中 $(u_{1n},u_{2n})\xrightarrow{\text{a. e.}}(u_1,u_2)\ (n\to\infty)$，所以由 Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式[7] 可知，在 $L^{2N/(N-\alpha)}(\mathbb{R}^N)$ 中，

$$I_\alpha(|u_{in}|^p-|u_{in}-u_i|^p)\to I_\alpha\,|u_i|^p\quad(n\to\infty).$$

又因为在 $\mathcal{H}$ 中 $(u_{1n},u_{2n})\rightharpoonup(u_1,u_2)\ (n\to\infty)$，所以由文献[7] 的引理 2.5 可知，在 $L^{2N/(N+\alpha)}(\mathbb{R}^N)$ 中，

$$|u_{in}-u_i|^p\rightharpoonup 0\quad(n\to\infty).$$

由式(9) 可知，引理 5 成立.

证毕.

2　定理的证明

引理 6　设 $N\geqslant 3$，$\alpha\in(0,N)$，$c^*=2^{\frac{-N}{2(2+\alpha)}}|Q_{(N+\alpha+2)/N}|_2$，则有：

（Ⅰ）若$\frac{N+\alpha}{N}<p<\frac{N+\alpha+2}{N}$，则对任意 $c>0$，$I_p(u_1,u_2)$ 在 $\mathscr{N}(c)$ 上是下有界且强制的，且 $I_p(c^2)<0$；

（Ⅱ）若 $p=\frac{N+\alpha+2}{N}$，$0<\lambda_1,\lambda_2\leqslant 1$ 且 $\beta\leqslant\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，则对任意$0<c\leqslant c^*$，$I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)=0$；

（Ⅲ）若 $p=\frac{N+\alpha+2}{N}$，$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 1$ 且 $\beta\geqslant\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，则对任意$c>c^*$，$I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)=-\infty$；

（Ⅳ）若$\frac{N+\alpha+2}{N}<p<\frac{N+\alpha}{N-2}$，则对任意 $c>0$，$I_p(c^2)=-\infty$.

证明 （Ⅰ）取$(u_1,u_2)\in N(c)$，由式(3)、式(7)和引理2可知，存在一个正常数$C=\frac{c^{N+\alpha-(N-2)p}}{2|Q_p|_2^{2p-2}}$，使得

$$I_p(u_1,u_2)\geqslant\frac{1}{2}\Big(A(u_1)+A(u_2)\Big)-C\Big[\lambda_1\Big(A(u_1)\Big)^{\frac{Np-(N+\alpha)}{2}}+\lambda_2\Big(A(u_2)\Big)^{\frac{Np-(N+\alpha)}{2}}\Big]-2\beta C[A(u_1)]^{\frac{Np-(N+\alpha)}{4}}[A(u_2)]^{\frac{Np-(N+\alpha)}{4}}. \tag{10}$$

由于$\frac{N+\alpha}{N}<p<\frac{N+\alpha+2}{N}$，即 $0<Np-(N+\alpha)<2$，则由式(10)可知，$I_p(u_1,u_2)$ 在 $\mathscr{N}(c)$ 上是下有界且强制的.

下面证明 $I_p(c^2)<0$.

对任意 $t>0$，令$\Big(u_1^t(x),u_2^t(x)\Big)=\Big(t^{\frac{N}{2}}u_1(tx),t^{\frac{N}{2}}u_2(tx)\Big)\in\mathscr{N}(c)$，则

$$I_p\Big(u_1^t(x),u_2^t(x)\Big)=\frac{t^2}{2}\Big(A(u_1)+A(u_2)\Big)-\frac{t^{Np-(N+\alpha)}}{2p}\Big(\lambda_1B(u_1)+\lambda_2B(u_2)\Big)-\frac{\beta t^{Np-(N+\alpha)}}{p}D(u_1^p,u_2^p)<0\ (t\to 0^+), \tag{11}$$

其中，$0<Np-(N+\alpha)<2$. 故对任意 $c>0$，$I_p(c^2)<0$.

（Ⅱ）对任意$0<c\leqslant c^*$，有：

$$I_{(N+\alpha+2)/N}(u_1,u_2)\geqslant\frac{1}{2}\Big(A(u_1)+A(u_2)\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{c}{c^*}\Big)^{\frac{2(2+\alpha)}{N}}\Big[\lambda_1\Big(A(u_1)\Big)+\lambda_2\Big(A(u_2)\Big)\Big]\geqslant 0. \tag{12}$$

由式(11)可得，$I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)\leqslant I_{(N+\alpha+2)/N}\Big(u_1^t(x),u_2^t(x)\Big)\to 0\ (t\to 0^+)$. 结合式(11)和式(12)可知，对任意$0<c\leqslant c^*$，有 $I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)=0$.

（Ⅲ）记

$$(Q_1^t(x),Q_2^t(x))=\left(\frac{ct^{\frac{N}{2}}}{c^*2^{\frac{N}{2(2+\alpha)}}}Q_{(N+\alpha+2)/N}(tx),\frac{ct^{\frac{N}{2}}}{c^*2^{\frac{N}{2(2+\alpha)}}}Q_{(N+\alpha+2)/N}(tx)\right)\in\mathscr{N}(c),$$

则由式(8)可知，当 $t\to+\infty$时，

$$I_{(N+\alpha+2)/N}\Big(Q_1^t(x),Q_2^t(x)\Big)=\frac{c^2t^2}{(c^*)^2 2^{\frac{N}{2+\alpha}}}A(Q_{(N+\alpha+2)/N})\left[1-\frac{\lambda_1+\lambda_2+2\beta}{4}\Big(\frac{c}{c^*}\Big)^{\frac{2(\alpha+2)}{N}}\right]\to-\infty.$$

因此，对任意 $c>c^*$，$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 1$ 且 $\beta\geqslant\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，$I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)=-\infty$，即 $I_{(N+\alpha+2)/N}(c^2)$ 不存在极小元.

（Ⅳ）若$\frac{N+\alpha+2}{N}<p<\frac{N+\alpha}{N-2}$，则 $Np-(N+\alpha)>2$. 由式(11)可知，$I_p(c^2)\leqslant I_p\Big(u_1^t(x),u_2^t(x)\Big)\to-\infty(t\to+\infty)$，即 $I_p(c^2)=-\infty$.

证毕.

引理7 设 $S(a,b)=\{(u,v):|u|_2^2=a,|v|_2^2=b\}$，$I_p(a,b)=\inf_{(u,v)\in S(a,b)}I_p(u,v)$. 若$\frac{N+\alpha}{N}<$

$p < \dfrac{N+\alpha+2}{N}$,则

(Ⅰ) 函数 $c \mapsto I_p(c^2)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 中是连续的;

(Ⅱ) $I_p(a,b) \leqslant I_p(a_1,b_1) + I_p(a_2,b_2)$,其中 $a,b,a_1,a_2,b_1,b_2 > 0$,且 $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.

证明　(Ⅰ) 对 $\theta > 0$, $c > 0$,任取 $(u_1,u_2) \in \mathscr{N}(c)$,则 $(\theta u_1, \theta u_2) \in \mathscr{N}(\theta c)$,且

$$I_p(\theta u_1,\theta u_2) - \theta^2 I_p(u_1,u_2) = \frac{\theta^2 - \theta^{2p}}{2p}\Big(\lambda_1 B(u_1) + \lambda_2 B(u_2) + 2\beta D(u_1^p, u_2^p)\Big). \tag{13}$$

设 $\{(u_{1n},u_{2n})\} \subset \mathscr{N}(c)$ 是 $I_p(c^2)$ 的一个极小化序列,则由引理 6 可知,$\{(u_{1n},u_{2n})\}$ 在 $\mathscr{H}$ 中有界. 取数列 $\{c_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. 将 (u_{1n},u_{2n}) 和 $\theta_n = \dfrac{c_n}{c}$ 分别替换成式(13) 中的 (u_1,u_2) 和 θ 可知,$\{(\theta_n u_{1n}, \theta_n u_{2n})\} \subset \mathscr{N}(c_n)$,于是 $I_p(\theta_n u_{1n},\theta_n u_{2n}) \geqslant I_p(c_n^2)$,从而有:

$$\frac{\theta_n^2 - \theta_n^{2p}}{2p}[\lambda_1 B(u_{1n}) + \lambda_2 B(u_{2n}) + 2\beta D(u_{1n}^p, u_{2n}^p)] =$$
$$I_p(\theta_n u_{1n},\theta_n u_{2n}) - \theta_n^2 I_p(u_{1n},u_{2n}) \geqslant I_p(c_n^2) - \theta_n^2 I_p(u_{1n},u_{2n}).$$

由此可得:

$$\lim_{n\to\infty} I_p(c_n^2) \leqslant \lim_{n\to\infty} I_p(u_{1n},u_{2n}) = I_p(c^2).$$

同理,取序列 $\{(u_{1n},u_{2n})\} \subset \mathscr{N}(c_n)$,将 (u_{1n},u_{2n}) 和 $\theta_n = \dfrac{c_n}{c}$ 分别替换成式(13) 中的 $(\theta u_1, \theta u_2)$ 和 θ,可得 $I_p(c^2) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} I_p(c_n^2)$. 再结合 $\lim\limits_{n\to\infty} I_p(c_n^2) \leqslant I_p(c^2)$,即得 $\lim\limits_{n\to\infty} I_p(c_n^2) = I_p(c^2)$.

(Ⅱ) 对任意 $\epsilon > 0$,存在 $(\varphi_{1,\epsilon},\psi_{1,\epsilon}), (\varphi_{2,\epsilon},\psi_{2,\epsilon}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$,使得

$$I_p(\varphi_{1,\epsilon},\psi_{1,\epsilon}) \leqslant I_p(a_1,b_1) + \frac{\epsilon}{2}, (\varphi_{1,\epsilon},\psi_{1,\epsilon}) \in S(a_1,b_1),$$

$$I_p(\varphi_{2,\epsilon},\psi_{2,\epsilon}) \leqslant I_p(a_2,b_2) + \frac{\epsilon}{2}, (\varphi_{2,\epsilon},\psi_{2,\epsilon}) \in S(a_2,b_2).$$

设 $(\varphi_{\epsilon,n},\psi_{\epsilon,n}) = \Big(\varphi_{1,\epsilon}(x) + \varphi_{2,\epsilon}(x - ne_1), \psi_{1,\epsilon}(x) + \psi_{2,\epsilon}(x - ne_1)\Big) \in S(a,b)$ $(n \to \infty)$,其中 $e_1 = (1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^N$, $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$. 由于 $(\varphi_{1,\epsilon},\psi_{1,\epsilon})$ 和 $(\varphi_{2,\epsilon},\psi_{2,\epsilon})$ 具有紧支集,于是有:

$$I_p(a,b) \leqslant I_p(\varphi_{\epsilon,n},\psi_{\epsilon,n}) = I_p\Big(\varphi_{1,\epsilon}(x),\psi_{1,\epsilon}(x)\Big) + I_p\Big(\varphi_{1,\epsilon}(x - ne_1),\psi_{1,\epsilon}(x - ne_1)\Big) \quad (n \to \infty),$$

且

$$I_p\Big(\varphi_{2,\epsilon}(x - ne_1),\psi_{2,\epsilon}(x - ne_1)\Big) = I_p\Big(\varphi_{2,\epsilon}(x),\psi_{2,\epsilon}(x)\Big) \quad (n \to \infty).$$

因此,

$$I_p(a,b) \leqslant \limsup_{n\to\infty} I_p\Big(\varphi_{\epsilon,n}(x),\psi_{\epsilon,n}(x)\Big) =$$
$$\limsup_{n\to\infty}\bigg(I_p(\varphi_{1,\epsilon},\psi_{1,\epsilon}) + I_p\Big(\varphi_{2,\epsilon}(x - ne_1),\psi_{2,\epsilon}(x - ne_1)\Big)\bigg) =$$
$$I_p(\varphi_{1,\epsilon},\psi_{1,\epsilon}) + I_p(\varphi_{2,\epsilon},\psi_{2,\epsilon}) \leqslant I_p(a_1,b_1) + I_p(a_2,b_2) + \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性知,$I_p(a,b) \leqslant I_p(a_1,b_1) + I_p(a_2,b_2)$.

证毕.

引理 8　设 $N \geqslant 3$, $\alpha \in (0,N)$,且 $\dfrac{N+\alpha}{N} < p < \dfrac{N+\alpha}{N-2}$. 若 (u_{10},u_{20}) 是 $I_p(u_1,u_2)$ 在 $\mathscr{N}(c)$ 上的临界点,则

$$A(u_{10}) + A(u_{20}) - \frac{Np - (\alpha+N)}{2p}\Big(\lambda_1 B(u_{10}) + \lambda_2 B(u_{20}) + 2\beta D(u_{10}^p, u_{20}^p)\Big) = 0. \tag{14}$$

证明　因为 $(I_p|_{N(c)})'(u_{10},u_{20}) = 0$,所以存在常数 $\mu_{1c}, \mu_{2c}, \mu_c < 0$,满足 $\mu_{1c} + \mu_{2c} = \mu_c$,且在

$H^{-1}(\mathbb{R}^N)\times H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ 中 $(I_p)_i(u_{10},u_{20})-\mu_{ic}u_{i0}=0\ (i=1,2)$，即 $A(u_{i0})-\lambda_i B(u_{i0})-\beta D(u_{10}^p,u_{20}^p)=\mu_{ic}c^2$，从而

$$A(u_{10})+A(u_{20})-\lambda_1 B(u_{10})-\lambda_2 B(u_{20})-2\beta D(u_{10}^p,u_{20}^p)=\mu_c c^2. \tag{15}$$

又由于 (u_{10},u_{20}) 满足恒等式[7]：

$$\frac{N-2}{2}\Big(A(u_{10})+A(u_{20})\Big)-\frac{\alpha+N}{2p}\Big(\lambda_1 B(u_{10})+\lambda_2 B(u_{20})+2\beta D(u_{10}^p,u_{20}^p)\Big)=\frac{\mu_c N}{2}c^2. \tag{16}$$

联立式(15)和式(16)可知：

$$A(u_{10})+A(u_{20})=\frac{Np-(\alpha+N)}{2p}\Big(\lambda_1 B(u_{10})+\lambda_2 B(u_{20})+2\beta D(u_{10}^p,u_{20}^p)\Big), \tag{17}$$

$$\mu_c=\frac{(N-2)p-(\alpha+N)}{2pc^2}\Big(\lambda_1 B(u_{10})+\lambda_2 B(u_{20})+2\beta D(u_{10}^p,u_{20}^p)\Big)<0.$$

由式(17)可知，式(14)成立.

证毕.

下面利用以上引理证明定理.

定理的证明 （Ⅰ）设 $(u_1,u_2)\in\mathscr{N}(c)$，由(6)式和引理2可知：

$$I_{(N+\alpha)/N}(u_1,u_2)\geqslant-\frac{N(\lambda_1+\lambda_2+2\beta)}{2(N+\alpha)}\Big(\frac{c}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2}\Big)^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}.$$

令

$$\Big(Q_{(N+\alpha)/N}^t(x),Q_{(N+\alpha)/N}^t(x)\Big)=\Big(\frac{ct^{\frac{N}{2}}}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2}Q_{(N+\alpha)/N}(tx),\frac{ct^{\frac{N}{2}}}{|Q_{N+\alpha/N}|_2}Q_{(N+\alpha)/N}(tx)\Big)\in\mathscr{N}(c),$$

则

$$I_{(N+\alpha)/N}\Big(Q_{(N+\alpha)/N}^t(x),Q_{(N+\alpha)/N}^t(x)\Big)=\frac{c^2t^2}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2^2}A(Q_{(N+\alpha)/N})-\frac{N(\lambda_1+\lambda_2+2\beta)}{2(N+\alpha)}\Big(\frac{c}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2}\Big)^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}.$$

由此表明

$$I_{(N+\alpha)/N}(c^2)=-\frac{N(\lambda_1+\lambda_2+2\beta)}{2(N+\alpha)}\Big(\frac{c}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2}\Big)^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}\quad(t\to 0^+). \tag{18}$$

由此推断：对任意 $c>0$，$I_{(N+\alpha)/N}(c^2)$ 不存在极小元. 反之，则存在 $c_0>0$，使得 $I_{(N+\alpha)/N}(c_0^2)$ 存在极小元 $(u_{10},u_{20})\in\mathscr{N}(c_0)$，即 $I_{(N+\alpha)/N}(c_0^2)=I_{(N+\alpha)/N}(u_{10},u_{20})$. 由式(6)和式(18)可知：

$$0\leqslant A(u_{10})+A(u_{20})=\frac{N}{\alpha+N}\Big(\lambda_1 B(u_{10})+\lambda_2 B(u_{20})+2\beta D(u_{10}^p,u_{20}^p)\Big)-$$

$$\frac{N(\lambda_1+\lambda_2+2\beta)}{(N+\alpha)}\Big(\frac{c_0}{|Q_{(N+\alpha)/N}|_2}\Big)^{\frac{2(N+\alpha)}{N}}\leqslant 0.$$

由此表明 $(u_{10},u_{20})=(0,0)$，与 $(u_{10},u_{20})\in\mathscr{N}(c_0)$ 矛盾.

（Ⅱ）由引理6可知，$I_p(c^2)<0$. 下面证明 $I_p(c^2)$ 至少存在一个径向极小元.

取 $I_p(c^2)$ 的一个极小化序列 $\{(u_{1n},u_{2n})\}\subset\mathscr{N}(c)$，且 $\{(u_{1n},u_{2n})\}\subset H_r^1(\mathbb{R}^N)\times H_r^1(\mathbb{R}^N)$. 由引理6可知，$\{(u_{1n},u_{2n})\}$ 在 $\mathscr{H}$ 中有界，故在 $H_r^1(\mathbb{R}^N)\times H_r^1(\mathbb{R}^N)$ 中也有界. 由 $B(u)$ 和 $D(u^p,u^p)$ 的定义可知，存在与 N 无关的正常数 $C>0$，使得 $\lambda_1 B(u_{1n})+\lambda_2 B(u_{2n})+2\beta D(u_{1n}^p,u_{2n}^p)\geqslant C$. 因此，存在 $(u_1,u_2)\in\mathscr{H}$，使得在 $\mathscr{H}$ 中，

$$(u_{1n},u_{2n})\rightharpoonup(u_1,u_2)\quad(n\to\infty), \tag{19}$$

且在 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N$ 中，

$$(u_{1n},u_{2n})\xrightarrow{\text{a. e.}}(u_1,u_2)(n\to\infty). \tag{20}$$

又由引理4可知，$(u_{1n},u_{2n})\neq(0,0)$，从而可得 $0<|u_1|_2,|u_2|_2\leqslant c$.

情形1 $|u_1|_2,|u_2|_2$ 有且只有一个小于 c. 设 $0<|u_1|_2^2:=a_1<c^2$，$|u_2|_2^2=c^2$，记 $\tilde{u}_{1n}=u_{1n}-u_1$，

由文献[3] 定理 1 可知，$|u_1|_2=c$.

情形 2　$|u_1|_2$，$|u_2|_2$ 都小于 c. 设 $0<|u_1|_2^2:=a_1<c^2$，$0<|u_2|_2^2:b_1<c^2$，记 $\tilde{u}_{1n}=u_{1n}-u_1$，$\tilde{u}_{2n}=u_{2n}-u_2$，由引理 3 和式(19)、式(20) 可知：

$$\lim_{n\to\infty}|\tilde{u}_{1n}|_2^2=\lim_{n\to\infty}|u_{1n}|_2^2-|u_1|_2^2=c^2-a_1=a_2>0,$$
$$\lim_{n\to\infty}|\tilde{u}_{2n}|_2^2=\lim_{n\to\infty}|u_{2n}|_2^2-|u_2|_2^2=c^2-b_1=b_2>0.$$

根据 Weak Young 不等式[5] 和引理 1 可知：

$$B(u)\leqslant C(N,\alpha)\,|u|_{2Np/(N+\alpha)}^{2p},\tag{21}$$

其中，$\dfrac{N+\alpha}{N}<p<\dfrac{N+\alpha+2}{N}$，即 $2<\dfrac{2Np}{N+\alpha}<2^*$. 由引理 5 和引理 7 可得：

$$\begin{aligned}I_p(c^2)=I_p(c^2,c^2)=I_p(u_{1n},u_{2n})+o(1)=\\ I_p(u_1,u_2)+I_p(\tilde{u}_{1n},\tilde{u}_{2n})+o(1)\geqslant\\ I_p(a_1,b_1)+I_p(\tilde{u}_{1n},\tilde{u}_{2n})+o(1).\end{aligned}\tag{22}$$

再由式(21) 和紧嵌入 $H_r^1(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^N)(2<s<2^*)$ 可得，$B(u_{in})\to B(u_i)(i=1,2)$，即 $\tilde{u}_{1n},\tilde{u}_{2n}\to 0$，从而有

$$I_p(\tilde{u}_{1n},\tilde{u}_{2n})=\frac{1}{2}\Big(A(\tilde{u}_{1n})+A(\tilde{u}_{2n})\Big)+o(1)\geqslant o(1).\tag{23}$$

设 $a_2\geqslant b_2$，$|u|_2^2=a_2$，则$\left(u,\sqrt{\dfrac{b_2}{a_2}}u\right)\in S(a_2,b_2)$，且

$$\begin{aligned}I_p\left(u,\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}u\right)=\frac{1}{2}\Big(A(u)+\frac{b_2}{a_2}A(u)\Big)-\frac{\lambda_1}{2p}B(u)-\frac{\lambda_2 b_2^p}{2pa_2^p}B(u)-\frac{\beta b_2^{\frac{p}{2}}}{pa_2^{\frac{p}{2}}}D(u^p,u^p)\leqslant\\ 2\Big(\frac{1}{2}A(u)-\frac{\lambda_1}{4p}B(u)\Big)\leqslant 2I_p^{a_2,\lambda_1/2}(u),\end{aligned}\tag{24}$$

其中，$I_p^{\alpha,\lambda}(v):=\dfrac{1}{2}A(v)-\dfrac{\lambda}{2p}B(v)$，$v\in H^1(\mathbb{R}^N)$，且 $|v|_2^2=\alpha$. 由文献[3] 可知，$I_p^{a_2,\lambda_1/2}(u)$ 的极小元可达，设 u_0 是 $I_p^{a_2,\lambda_1/2}(u)$ 的达到极小元，则

$$I_p(a_2,b_2)\leqslant I_p\left(u_0,\sqrt{\frac{b_2}{a_2}}u_0\right)\leqslant 2I_p^{a_2,\lambda_1/2}(u_0).\tag{25}$$

由文献[3] 的引理 2.4 可知，$I_p^{a_2,\lambda_1/2}(u_0)<0$. 由式(22) ～ (25) 和引理 7 可知：

$$I_p(c^2,c^2)\geqslant I_p(a_1,b_1)+I_p(a_2,b_2)-2I_p^{a_2,\lambda_1/2}(u_0)>I_p(a_1,b_1)+I_p(a_2,b_2)\geqslant I_p(c^2,c^2)$$

是一个矛盾. 因此 $(u_1,u_2)\in\mathcal{N}(c)$. 由引理 2 和(7) 式可知，当 $n\to\infty$时，

$$\lambda_1 B(u_{1n})+\lambda_2 B(u_{2n})+2\beta D(u_{1n}^p,u_{2n}^p)\to\lambda_1 B(u_1)+\lambda_2 B(u_2)+2\beta D(u_1^p,u_2^p),$$

从而有 $I_p(c^2)\leqslant I_p(u_1,u_2)\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}I_p(u_{1n},u_{2n})=I_p(c^2)$，即 $I_p(u_1,u_2)=I_p(c^2)$. 因此，(u_1,u_2) 是 $I_p(c^2)$ 的径向极小元.

(Ⅲ) 对于(ⅰ)，由引理 6 可知结论成立.

对于(ⅱ)，假设存在 $c_0\in(0,c^*]$，使得 $I_{(N+\alpha+2)/N}(c_0^2)$ 存在极小元$(u_{10},u_{20})\in\mathcal{N}(c_0)$，则由引理 6 可知，$I_{(N+\alpha+2)/N}(c_0^2)=I_{(N+\alpha+2)/N}(u_{10},u_{20})=0$. 又由引理 2、式(7) 和 $\beta\leqslant\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$ 可知：

$$\begin{aligned}A(u_{10})+A(u_{20})=\frac{N}{N+\alpha+2}\Big(\lambda_1 B(u_{10})+\lambda_2 B(u_{20})+2\beta D(u_{10}^{(N+\alpha+2)/N},u_{20}^{(N+\alpha+2)/N})\Big)\leqslant\\ \left(\frac{c_0}{c^*}\right)^{\frac{2(\alpha+2)}{N}}\Big(\lambda_1 A(u_{10})+\lambda_2 A(u_{20})\Big)\leqslant\lambda_1 A(u_{10})+\lambda_2 A(u_{20}).\end{aligned}$$

这与 $0<\lambda_1,\lambda_2<1$ 矛盾.

对于(ⅲ),假设(u_{10},u_{20})是$I_{(N+\alpha+2)/N}(u_1,u_2)$在$\mathscr{N}(c)$上的临界点,则由引理2和引理8可知:

$$A(u_{10})+A(u_{20})=\frac{N}{N+\alpha+2}\Big(\lambda_1 B(u_{10})+\lambda_2 B(u_{20})+2\beta D(u_{10}^{(N+\alpha+2)/N},u_{20}^{(N+\alpha+2)/N})\Big)\leqslant$$

$$\left(\frac{c}{c^*}\right)^{\frac{2(\alpha+2)}{N}}\Big(\lambda_1 A(u_{10})+\lambda_2 A(u_{20})\Big).$$

这与$0<c\leqslant c^*$矛盾.

由引理6可知,(IV)和(V)是成立的.

证毕.

3　结语

本文研究了耦合非线性Choquard方程组(1)正规化解的存在性,这是对文献[3]结果的推广.但对于临界情况$p=\frac{N+\alpha+2}{N}$,本文尚未进行详细论述,有待进一步研究.

参考文献:

[1] WANG J,SHI J. Standing waves for a coupled nonlinear Hartree equations with nonlocal interaction[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations,2017,56:168.

[2] WANG J,YANG W. Normalized solutions and asymptotical behavior of minimizer for the coupled Hartree equations [J]. Journal of Differential Equations,2018,265(2):501-544.

[3] YE H. Mass minimizers and concentration for nonlinear Choquard equations in $\mathbb{R}^N$[J]. Topological Methods in Nonlinear Analysis,2016,48(2):393-417.

[4] LIEB E. Sharp constants in the hardy-littlewood-sobolev and related inequalities[J]. Annals of Mathematics,1983, 118(2):349-374.

[5] LIEB E, LOSS M. Analysis,second edition[M]. Providence:American Mathematical Society,2001:57-106.

[6] WILLEM M. Minimax Theorem,Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications[M]. Boston: Birkhäuser,1996:18-37.

[7] MOROZ V,SCHAFTINGEN J. Groundstates of nonlinear Choquard equations:existence,qualitative properties and decay asymptotics[J]. Journal of Functional Analysis,2013,265(2):153-184.

Existence of Normalized Solutions of Coupled Choquard Equations

LI Jiamo[1], SHEN Zifei[2]

(School of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

Abstract: We consider the existence of normalized solutions for a class of coupled nonlinear Choquard equations. For p in different ranges, we use the variational method to obtain the existence of subcritical, critical and supercritical normalized solutions of the equations, which develops and generalizes the relevant results in referred articles.

Keywords: coupled Choquard equations; variational method; normalized solutions

[责任编辑　高俊娥]