一类特殊的完备左对称代数的导子与 triple 导子

吴孟珂，吴明忠

（西华师范大学 数学与信息学院，四川 南充 637009）

摘　要：利用导子和 triple 导子的定义，通过计算线性变换在一组基下的结果，得到与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数的导子，以及 triple 导子的矩阵形式.

关键词：左对称代数；Abelian 李代数；相容；导子；triple 导子

中图分类号：O152　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1009 – 1734(2024)02 – 0001 – 07

0　引言

左对称代数（也被称为 pre – Lie 代数、拟结合代数、Vinberg 代数）是一类很重要的非结合代数，最早由 Cayley 于 1890 年作为一种 rooted tree 代数引入[1]. 左对称代数也源于 20 世纪 60 年代对几何和代数中一些课题的研究，如李群上的仿射流形和仿射结构[2]，以及结合代数的形变[3]. 最初人们并未将左对称代数作为一个独立的代数系统进行研究，直到 20 世纪 90 年代才有相关文献将左对称代数作为独立的领域来研究. 文献[4]研究了左对称代数在不同领域的重要作用，如向量场、顶点代数、operad 理论、李群上的左不变仿射结构等. 正如文献[5]指出的那样，“左对称代数应当得到比以往更多的关注”.

在代数结构理论的研究中，导子[6]和 triple 导子[7]是非常重要的内容，它们能够反映代数最本质的结构和性质. 近年来，关于代数的导子和 triple 导子的研究受到越来越多的关注. 文献[8]利用导子和 triple 导子的定义，刻画了特征不为 2 的代数闭域上 4 维幂零李代数的导子和 triple 导子. 文献[9]对 4 维幂零左对称代数的相邻李代数的 triple 导子与 δ –导子进行了研究. 文献[10]和文献[11]确定了 Q_n，L_n 的导子代数的极大环面，并证明 Q_n，L_n 的导子代数是可完备化的. 文献[12]给出了拟 R_n filiform 李代数的导子和自同构，并证明了拟 R_n filiform 李代数是可完备化的幂零李代数. 文献[13]给出了广义矩阵代数上的李 triple 导子结构. 由此可见，导子和 triple 导子对代数理论的研究具有非常重要的意义.

文献[14]给出了完备左对称代数的概念，目前关于完备左对称代数的研究较少. 对五维完备左对称代数进行分类一直是一个难题，文献[14]给出了与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数的一个确切的分类，列出了所有可能的同构类型的详细结构，并给出了其自同构相应的矩阵形式，但未对其导子和 triple 导子进行深入研究. 本文在此基础上，利用导子的定义，以文献[14]中的 $A_{4,1}$ 为例，通过计算线性变换在一组基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$下的结果，得到 $A_{4,1}$ 的导子的矩阵形式；利用 triple 导子的定义，以文献[14]中的 $A_{4,4}$ 为例，通过计算线性变换在一组基$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$下的结果，得到 $A_{4,4}$ 的 triple 导子的矩阵形式. 对于文献[14]中其他与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数，可以按照类似的方法，得到它们的导子以及 triple 导子相应的矩阵形式. 本文通过表格形式呈现其

收稿日期：2024 – 01 – 20

基金项目：西华师范大学博士科研启动基金项目(15E027)；西华师范大学基本科研业务费项目(17C048)；西华师范大学英才科研基金项目(17YC392)；四川省教育厅资助科研项目(17AZ0378).

通信作者：吴明忠，博士，副教授，研究方向：李代数与李群. E – mail：m. z. wu@163. com

导子和 triple 导子相应的矩阵形式，这是对文献[14]的一个重要补充.

本文所讨论的线性空间和代数都定义在数域 $\mathbb{C}$ 上.

1 基本概念

定义 1[1] 设 A 是一个线性空间. 在 A 上定义一个双线性运算 $(x,y)\to xy$，如果这个双线性运算满足对任意的 $x,y,z\in A$，都有：

$$(xy)z-x(yz)=(yx)z-y(xz),$$

则称 A 为一个左对称代数.

定义 2[14] 设 A 是一个左对称代数. 对 $x\in A$，记 ρ_x 是 A 上的右乘运算：$\rho_x(y)=yx$，$\forall\, y\in A$. 对任意的 $x\in A$，若 $1+\rho_x$ 是一个线性空间的同构，那么称左对称代数 A 为一个完备左对称代数.

定理 1[14] 设 A 是一个李代数(记李括积运算为 $[\cdot,\cdot]$). 如果在线性空间 A 上有一个左对称代数运算使得

$$[x,y]=xy-yx,\ \forall\, x,y\in A,$$

则称这个左对称代数的结构与给定的李代数 A 的结构相容.

定义 3[6] 设 A 是一个代数，σ 为 A 上的一个线性变换. 若 σ 满足：

$$\sigma(xy)=\sigma(x)y+x\sigma(y),\ \forall\, x,y\in A, \tag{1}$$

则称 σ 为代数 A 的导子.

定义 4[7] 设 A 是一个代数，φ 为 A 上的一个线性变换. 若 φ 满足：

$$\varphi(x(yz))=\varphi(x)(yz)+x(\varphi(y)z)+x(y\varphi(z)),\ \forall\, x,y,z\in A, \tag{2}$$

则称 φ 为代数 A 的 triple 导子.

2 主要结果

文献[14]给出了与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数的具体结构，见表 1.

表 1 与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数的结构

维数	与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数	结构
2	N_2	$e_2\cdot e_2=e_1$
3	$A_{3,1}$	$e_2\cdot e_2=e_1, e_3\cdot e_3=e_1$
	$A_{3,2}$	$e_2\cdot e_2=e_1, e_3\cdot e_3=-e_1$
	$A_{3,3}$	$e_2\cdot e_3=e_1, e_3\cdot e_2=e_1, e_3\cdot e_3=e_2$
	$A_{3,4}$	$e_3\cdot e_3=e_1$
4	$A_{4,1}$	$e_2\cdot e_2=e_1, e_3\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_4=e_1$
	$A_{4,2}$	$e_2\cdot e_2=e_1, e_3\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_4=-e_1$
	$A_{4,3}$	$e_2\cdot e_4=e_1, e_3\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_2=e_1, e_4\cdot e_4=e_2$
	$A_{4,4}$	$e_2\cdot e_4=e_1, e_3\cdot e_3=e_1, e_3\cdot e_4=e_2, e_4\cdot e_2=e_1, e_4\cdot e_3=e_2, e_4\cdot e_4=e_3$
	$A_{4,5}$	$e_3\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_4=e_1$
	$A_{4,6}$	$e_3\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_4=-e_1$
	$A_{4,7}$	$e_3\cdot e_3=e_1, e_3\cdot e_4=e_2, e_4\cdot e_3=e_2, e_4\cdot e_4=-e_1$
	$A_{4,8}$	$e_3\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_4=e_2$
	$A_{4,9}$	$e_3\cdot e_3=e_1, e_3\cdot e_4=e_2, e_4\cdot e_3=e_2$
	$A_{4,10}$	$e_3\cdot e_4=e_1, e_4\cdot e_3=e_1, e_4\cdot e_4=e_3$
	$A_{4,11}$	$e_4\cdot e_4=e_1$

定理 2　令 $A_{4,1}$ 的代数结构如表 1 中所述. 设 σ 是 $A_{4,1}$ 上的一个线性变换，则 σ 是 $A_{4,1}$ 的导子当且仅当 σ 在基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 下具有以下的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 2a_{22} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & -a_{32} & -a_{42} \\ 0 & a_{32} & a_{22} & -a_{43} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

证明　令

$$\sigma(e_2)=a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3+a_{42}e_4,$$
$$\sigma(e_3)=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3+a_{43}e_4,$$
$$\sigma(e_4)=a_{14}e_1+a_{24}e_2+a_{34}e_3+a_{44}e_4.$$

根据定义 3 和 $e_2\cdot e_2=e_1,e_3\cdot e_3=e_1,e_4\cdot e_4=e_1$，可得：

$$\sigma(e_1)=\sigma(e_2\cdot e_2)=\sigma(e_2)\cdot e_2+e_2\cdot\sigma(e_2)=2a_{22}e_1,$$
$$\sigma(e_1)=\sigma(e_3\cdot e_3)=\sigma(e_3)\cdot e_3+e_3\cdot\sigma(e_3)=2a_{33}e_1,$$
$$\sigma(e_1)=\sigma(e_4\cdot e_4)=\sigma(e_4)\cdot e_4+e_4\cdot\sigma(e_4)=2a_{44}e_1.$$

因此 $a_{22}=a_{33}=a_{44}$. 由此可得：

$$\sigma(e_1)=2a_{22}e_1,$$
$$\sigma(e_2)=a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3+a_{42}e_4,$$
$$\sigma(e_3)=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{22}e_3+a_{43}e_4,$$
$$\sigma(e_4)=a_{14}e_1+a_{24}e_2+a_{34}e_3+a_{22}e_4.$$

又因为 $e_2\cdot e_3=0,e_2\cdot e_4=0,e_3\cdot e_4=0$，可得：

$$\begin{cases} 0=\sigma(e_2\cdot e_3)=\sigma(e_2)\cdot e_3+e_2\cdot\sigma(e_3)=a_{32}e_1+a_{23}e_1, \\ 0=\sigma(e_2\cdot e_4)=\sigma(e_2)\cdot e_4+e_2\cdot\sigma(e_4)=a_{42}e_1+a_{24}e_1, \\ 0=\sigma(e_3\cdot e_4)=\sigma(e_3)\cdot e_4+e_3\cdot\sigma(e_4)=a_{43}e_1+a_{34}e_1. \end{cases} \tag{4}$$

分别比较式(4)两边 e_1 的系数，可得 $a_{23}=-a_{32},a_{24}=-a_{42},a_{34}=-a_{43}$.

综上可得：

$$\begin{cases} \sigma(e_1)=2a_{22}e_1, \\ \sigma(e_2)=a_{12}e_1+a_{22}e_2+a_{32}e_3+a_{42}e_4, \\ \sigma(e_3)=a_{13}e_1-a_{32}e_2+a_{22}e_3+a_{43}e_4, \\ \sigma(e_4)=a_{14}e_1-a_{42}e_2-a_{43}e_3+a_{22}e_4. \end{cases} \tag{5}$$

所以 $A_{4,1}$ 的导子 σ 在基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 下的矩阵具有式(3)的形式.

反之，当线性变换 σ 在基 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 下具有式(3)的矩阵形式时，$\forall x,y\in A_{4,1}$，设 $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4$，$y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4$，则

$$\begin{aligned} \sigma(x)y+x\sigma(y)=&\sigma(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4)+ \\ &(x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)\sigma(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4)= \\ &x_2y_2a_{22}e_2\cdot e_2+x_2y_3a_{32}e_3\cdot e_3+x_2y_4a_{42}e_4\cdot e_4- \\ &x_3y_2a_{32}e_2\cdot e_2+x_3y_3a_{22}e_3\cdot e_3+x_3y_4a_{43}e_4\cdot e_4- \\ &x_4y_2a_{42}e_2\cdot e_2-x_4y_3a_{43}e_3\cdot e_3+x_4y_4a_{22}e_4\cdot e_4+ \\ &x_2y_2a_{22}e_2\cdot e_2-x_2y_3a_{32}e_2\cdot e_2-x_2y_4a_{42}e_2\cdot e_2+ \\ &x_3y_2a_{32}e_3\cdot e_3+x_3y_3a_{22}e_3\cdot e_3-x_3y_4a_{43}e_3\cdot e_3+ \\ &x_4y_2a_{22}e_4\cdot e_4+x_4y_3a_{43}e_4\cdot e_4+x_4y_4a_{22}e_4\cdot e_4= \\ &2a_{22}(x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)e_1. \end{aligned} \tag{6}$$

$$\sigma(xy)=\sigma(x_1y_1e_1\cdot e_1+x_1y_2e_1\cdot e_2+x_1y_3e_1\cdot e_3+x_1y_4e_1\cdot e_4+$$

$$x_2y_1e_2\cdot e_1+x_2y_2e_2\cdot e_2+x_2y_3e_2\cdot e_3+x_2y_4e_2\cdot e_4+$$
$$x_3y_1e_3\cdot e_1+x_3y_2e_3\cdot e_2+x_3y_3e_3\cdot e_3+x_3y_4e_3\cdot e_4+$$
$$x_4y_1e_4\cdot e_1+x_4y_2e_4\cdot e_2+x_4y_3e_4\cdot e_3+x_4y_4e_4\cdot e_4)=$$
$$x_2y_2\sigma(e_1)+x_3y_3\sigma(e_1)+x_4y_4\sigma(e_1)=$$
$$2a_{22}(x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)e_1. \tag{7}$$

由式(6)和式(7)可得$\sigma(xy)=\sigma(x)y+x\sigma(y)$，满足导子的定义. 所以满足式(5)的线性变换$\sigma$是$A_{4,1}$的导子.

下面计算$A_{4,4}$的 triple 导子. 由$A_{4,4}$的结构，可得$A_{4,4}$中的e_1,e_2,e_3都可由e_4生成得到，如：

$$e_3=e_4\cdot e_4,$$
$$e_2=e_3\cdot e_4=(e_4\cdot e_4)\cdot e_4,$$
$$e_1=e_2\cdot e_4=(e_3\cdot e_4)\cdot e_4=((e_4\cdot e_4)\cdot e_4)\cdot e_4.$$

定理 3 令$A_{4,4}$的代数结构如表1中所述. 设φ是$A_{4,4}$上的一个线性变换，则φ是$A_{4,4}$的 triple 导子当且仅当φ在基$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$下具有以下的矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} a_{33}+2a_{44} & 3a_{34} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 3a_{44} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \tag{8}$$

证明 令

$$\varphi(e_3)=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3+a_{43}e_4,$$
$$\varphi(e_4)=a_{14}e_1+a_{24}e_2+a_{34}e_3+a_{44}e_4.$$

根据定义4和$e_2=e_4\cdot e_3=e_4\cdot(e_4\cdot e_4)$，$e_1=e_4\cdot e_2=e_4\cdot(e_3\cdot e_4)$，可得：

$$\varphi(e_2)=\varphi(e_4\cdot(e_4\cdot e_4))=\varphi(e_4)\cdot(e_4\cdot e_4)+e_4\cdot(\varphi(e_4)\cdot e_4)+e_4\cdot(e_4\cdot\varphi(e_4))=$$
$$3a_{34}e_1+3a_{44}e_2,\varphi(e_1)=\varphi(e_4\cdot(e_3\cdot e_4))=\varphi(e_4)\cdot(e_3\cdot e_4)+e_4\cdot(\varphi(e_3)\cdot e_4)+$$
$$e_4\cdot(e_3\cdot\varphi(e_4))=(a_{33}+2a_{44})e_1+a_{43}e_2.$$

由式(2)和$e_3\cdot(e_4\cdot e_3)=0$，可得：

$$0=\varphi(e_3\cdot(e_4\cdot e_3))=\varphi(e_3)\cdot(e_4\cdot e_3)+e_3\cdot(\varphi(e_4)\cdot e_3)+e_3\cdot(e_4\cdot\varphi(e_3))=2a_{43}e_1.$$

因此$a_{43}=0$.

综上可得：

$$\begin{cases}\varphi(e_1)=(a_{33}+2a_{44})e_1, \\ \varphi(e_2)=3a_{34}e_1+3a_{44}e_2, \\ \varphi(e_3)=a_{13}e_1+a_{23}e_2+a_{33}e_3, \\ \varphi(e_4)=a_{14}e_1+a_{24}e_2+a_{34}e_3+a_{44}e_4.\end{cases} \tag{9}$$

所以$A_{4,4}$的 triple 导子φ在基$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$下的矩阵具有式(8)的形式.

反之，当线性变换φ在基$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$下具有式(8)的矩阵形式时，$\forall x,y\in A_{4,4}$，设

$$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4,$$
$$y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4,$$
$$z=z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3+z_4e_4,$$

则

$$\varphi(x(yz))=\varphi((x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)((y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3+y_4e_4)(z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3+z_4e_4)))=$$
$$\varphi((x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3+x_4e_4)((y_2z_4+y_3z_3+y_4z_2)e_1+(y_3e_4+y_4z_3)e_2+y_4z_4e_3))=$$
$$\varphi((x_3y_4z_4+x_4y_3z_4+x_4y_4z_3)e_1+x_4y_4e_2)=$$
$$((x_3y_4z_4+x_4y_3z_4+x_4y_4z_3)(a_{33}+2a_{44})+3x_4y_4z_4a_{34})e_1+3x_4y_4z_4a_{44}e_2, \tag{10}$$

$$\varphi(x)(yz)=x_3y_4z_4a_{33}e_1+x_4y_3z_4a_{44}e_1+x_4y_4z_3a_{44}e_1+x_4y_4z_4a_{44}e_2+x_4y_4z_4a_{34}e_1, \tag{11}$$

$$x(\varphi(y)z)=x_3y_4z_4a_{44}e_1+x_4y_3z_4a_{33}e_1+x_4y_4z_3a_{44}e_1+x_4y_4z_4a_{34}e_1+x_4y_4z_4a_{44}e_2, \tag{12}$$

$$x(y\varphi(z))=x_3y_4z_4a_{44}e_1+x_4y_3z_4a_{44}e_1+x_4y_4z_3a_{33}e_1+x_4y_4z_4a_{34}e_1+x_4y_4z_4a_{44}e_2. \tag{13}$$

将式(11)、式(12)、式(13)相加，可得：

$$\begin{gathered}\varphi(x)(yz)+x(\varphi(y)z)+x(y\varphi(z))= \\ ((x_3y_4z_4+x_4y_3z_4+x_4y_4z_3)(a_{33}+2a_{44})+ \\ 3x_4y_4z_4a_{34})e_1+3x_4y_4z_4a_{44}e_2.\end{gathered} \tag{14}$$

由式(10)和式(14)可得 $\varphi(x(yz))=\varphi(x)(yz)+x(\varphi(y)z)+x(y\varphi(z))$，其满足 triple 导子的定义，所以满足式(9)的线性变换 φ 是 $A_{4,4}$ 的 triple 导子.

与定理 2 和定理 3 的证明过程类似，文献[14]中其他与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数同样可以按照导子和 triple 导子的定义，通过计算线性变换在一组基下的结果，得到导子和 triple 导子的矩阵形式，见表 2.

表 2　维数≤4 的与 Abelian 李代数相容的完备左对称代数的导子与 triple 导子

维数	与 Abelian 李代数相容的完备左对称代数	导子	triple 导子
2	N_2	$\begin{pmatrix}2a_{22} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{pmatrix}$	
3	$A_{3,1}$	$\begin{pmatrix}2a_{22} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & -a_{32}\\ 0 & a_{32} & a_{22}\end{pmatrix}$	
	$A_{3,2}$	$\begin{pmatrix}2a_{22} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{32}\\ 0 & a_{32} & a_{22}\end{pmatrix}$	
	$A_{3,3}$	$\begin{pmatrix}3a_{33} & 2a_{23} & a_{13}\\ 0 & 2a_{33} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3a_{33} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$
	$A_{3,4}$	$\begin{pmatrix}2a_{33} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}$	
4	$A_{4,1}$	$\begin{pmatrix}2a_{22} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & -a_{32} & -a_{42}\\ 0 & a_{32} & a_{22} & -a_{43}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{22}\end{pmatrix}$	
	$A_{4,2}$	$\begin{pmatrix}2a_{22} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & -a_{32} & a_{42}\\ 0 & a_{32} & a_{22} & a_{43}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{22}\end{pmatrix}$	
	$A_{4,3}$	$\begin{pmatrix}3a_{44} & 2a_{24} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & 2a_{44} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & 0 & -a_{23}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3a_{44} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a_{44}\end{pmatrix}$

表2(续)

维数	与Abelian李代数相容的完备左对称代数	导子	triple导子
4	$A_{4,4}$	$\begin{pmatrix} 4a_{44} & 3a_{34} & 2a_{24} & a_{14} \\ 0 & 3a_{44} & 2a_{34} & a_{24} \\ 0 & 0 & 2a_{44} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{33}+2a_{44} & 3a_{34} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 3a_{44} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$
	$A_{4,5}$	$\begin{pmatrix} 2a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & -a_{43} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{33} \end{pmatrix}$	
	$A_{4,6}$	$\begin{pmatrix} 2a_{33} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{43} \\ 0 & 0 & a_{43} & -a_{33} \end{pmatrix}$	
	$A_{4,7}$	$\begin{pmatrix} 2a_{33} & -2a_{43} & a_{13} & a_{14} \\ 2a_{43} & 2a_{33} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & -a_{43} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{33} \end{pmatrix}$	
	$A_{4,8}$	$\begin{pmatrix} 2a_{33} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 2a_{44} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$	
	$A_{4,9}$	$\begin{pmatrix} 2a_{33} & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 2a_{43} & a_{33}+a_{44} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$	
	$A_{4,10}$	$\begin{pmatrix} 3a_{44} & a_{12} & 2a_{34} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 2a_{44} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3a_{44} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$
	$A_{4,11}$	$\begin{pmatrix} 2a_{44} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$	

注:因N_2,$A_{3,1}$,$A_{3,2}$,$A_{3,4}$,$A_{4,1}$,$A_{4,2}$,$A_{4,5}$,$A_{4,6}$,$A_{4,7}$,$A_{4,8}$,$A_{4,9}$,$A_{4,11}$的结构特殊,其triple导子的矩阵形式中的元素没有限制,故本文未在表2中列出.

3 结 语

本文通过对线性变换在一组基下的结果的研究，确定了与 Abelian 李代数相容的维数小于或等于 4 维的完备左对称代数的导子以及 triple 导子的矩阵形式，补充了文献[14]的相关结果.

参考文献：

[1] CAYLEY A. On the theory of analytic forms called trees[C]//Collected Mathematics Papers of Arthur Cayley, Cam – bridge University, 1890: 242 – 246.

[2] KOSZUL J L. Domaines bornés homogènes et orbites de groupes de transformations affnes[J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1961, 89: 515 – 533.

[3] GERSTENHABER M. The cohomology structure of an associative ring[J]. Annals of Mathematics, 1963, 78: 267 – 288.

[4] BURDE D. Left – symmetric algebras or Pre – Lie algebras in geometry and physics [J]. Central European Journal of Mathematics, 2006, 4(3): 323 – 357.

[5] CHAPOTON F, LIVERNET M. Pre – Lie algebras and the rooted trees operad [J]. International Mathematics Research Notices, 2001, 8: 395 – 408.

[6] HUMPHREYS J E. Introduction to Lie algebras and representation theory [M]. New York: Springers – Verlag, 1972: 3 – 4.

[7] LISTER W G. A structure theory of Lie triple systems[J]. Transactions of the American Mathemtical Society, 1952, 72(3): 217 – 242.

[8] 陈翠，连海峰. 4 维幂零李代数的导子与 triple 导子[J]. 数学的实践与认识，2014，44(5)：232 – 235.

[9] 巫永萍. 4 维幂零左对称代数的相邻李代数的 triple 导子与 δ-导子[J]. 数学的实践与认识，2023，53(10)：239 – 244.

[10] 吴明忠. Q_n Filiform 李代数的导子代数[J]. 数学季刊，2013，28(3)：397 – 401.

[11] 吴明忠. L_n Filiform 李代数的导子代数[J]. 西华师范大学学报(自然科学版)，2007(4)：298 – 301.

[12] WU M Z. Quasi R_n filiform Lie algebras[J]. Linear Algebra and its Applications, 2013, 439(5): 1203 – 1220.

[13] ASHRAF M, AKHTAR M S. Characterizations of Lie triple derivations on generalized matrix algebras[J]. Communi – cations in Algebra, 2020, 48(9): 3651 – 3660.

[14] DEKIMPE K, IGODT P, ONGENAE V. The five – dimensional complete left – symmetric algebra structures compatible with an Abelian Lie algebra structure[J]. Linear algebra and Its applications, 1997, 263(1 – 3): 349 – 375.

Derivations and Triple Derivations of a Special Class of Complete Left – symmetric Algebra

WU Mengke, WU Mingzhong

(College of Mathematic and Information, China West Normal University, Nanchong 637009, China)

Abstract: In this paper, using the definitions of derivations and triple derivations, and calculating the results of linear transformations acting on a set of basis, the matrix forms of derivations of a complete Left – symmetric Algebra of dimension less than or equal to 4 dimensions compatible with the Abelian Lie algebra, and triple derivations of this type of algebras are obtained.

Keywords: left – symmetric algebra; abelian Lie algebra; compatible; derivations; triple derivations

[责任编辑　高俊娥]